Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton.

Par

J.-L.-W.-V. Jensen.

En se restreignant aux fonctions et aux variables réelles, il est aisé de trouver une expression simple et élégante pour le reste dans la formule générale d'interpolation due à Newton[1]) et retrouvée par Lagrange sous une forme différente de celle de Newton, mais au fond équivalente.

Soient, en effet, $F(x)$ une fonction réelle d'une variable réelle x et $g(x)$ la fonction entière et rationnelle du degré n, qui devient égale à $F(x)$ pour $(n+1)$ différentes valeurs de x:

$$g(x_\nu) = F(x_\nu), \quad \nu = 0, 1, \ldots n,$$

et supposons que la constante A soit déterminée de façon à satisfaire à l'équation

$$F(x') - g(x') = A(x'-x_0)(x'-x_1)\ldots(x'-x_n), \tag{α}$$

x' étant constante et différente de $x_0, x_1, \ldots x_n$.

Posons

$$f(x) = F(x) - g(x) - A(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

et supposons que $F(x)$ ait des dérivées continues et bien déterminées jusqu'à la $(n+1)^{\text{ième}}$ dans un intervalle enfermant les quantités $x_0, \ldots x_n$ et x', $f(x)$ jouit donc évidemment des mêmes propriétés, et l'on a par différentiation

$$f^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x) - A(n+1)!\,.$$

---

[1]) Principia, Lib. III, Lemma V.

Comme $f(x)$ devient zéro pour $(n+2)$ différentes valeurs de x: $x_0, \ldots x_n$ et x', il existe, d'après le théorème généralisé de Rolle, au moins une quantité x'', intermédiaire à la plus grande et à la plus petite de ces valeurs, pour laquelle on a

$$f^{(n+1)}(x'') = F^{(n+1)}(x'') - A(n+1)! = 0,$$

d'où vient, en tirant A de cette équation et en la substituant dans (α),

$$F(x') = g(x') + F^{(n+1)}(x'') \frac{(x'-x_0)(x'-x_1)\ldots(x'-x_n)}{(n+1)!}.$$

1. La belle formule que nous venons de démontrer, n'est pas nouvelle[1]), quoiqu'elle semble peu connue. En cherchant à l'étendre aux variables complexes, on va rencontrer des difficultés, parce que le théorème de Rolle ne reste point applicable aux variables complexes. Or, M. Darboux[2]) a démontré que le reste dans la formule de Taylor

$$R_n = F(z) - F(z_0) - F'(z_0)\frac{z-z_0}{1!} - \ldots - F^{(n)}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!} \qquad (\beta)$$

peut s'exprimer par la formule suivante

$$R_n = \lambda F^{(n+1)}(z_0 + \theta(z-z_0))\frac{(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

valable aussi pour les fonctions complexes ayant des dérivées le long de la droite allant de z_0 à z, λ étant une quantité imaginaire dont le module ne dépasse pas l'unité, et θ désignant un nombre réel compris entre zéro et l'unité.

On peut donner à l'équation (β) une autre forme identique mais pour ainsi dire condensée:

$$R_n = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \cdot \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}, \quad z \neq z_0,$$

ce que l'on vérifie en développant le deuxième membre par la formule de Leibniz pour la différentiation d'un produit.

---

1) Voir le Traité d'Analyse de M. H. Laurent, t. I, p. 75, 104, 107. A l'endroit cité, la formule générale d'interpolation est attribuée à Ampère.

2) Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e Série, t. II, p. 291.

En comparant les deux expressions de R_n on trouve

$$\frac{\partial^n}{\partial z_0^n}\cdot\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{\lambda}{n+1}F^{(n+1)}(z_0+\theta(z-z_0)), \qquad (1)$$

formule qui nous sera utile dans la suite. Du reste il est aisé de vérifier directement cette formule en employant l'intégrale définie

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 F'(tz_0+(1-t)z)\,dt,$$

d'où par différentiation

$$\frac{\partial^n}{\partial z_0^n}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 F^{(n+1)}(tz_0+(1-t)z)\,t^n dt.$$

Puisque la valeur absolue (le module) de l'intégrale dans le deuxième membre reste moindre que $M\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}M$, M étant la plus grande valeur que $\left|F^{(n+1)}(tz_0+(1-t)z)\right|$ puisse atteindre, quand t varie de zéro à l'unité, valeur qui peut évidemment être exprimée par $\left|F^{(n+1)}(\theta z_0+(1-\theta)z)\right|$, la formule (1) est démontrée de nouveau.

2. Il faut maintenant recourir à une opération qui nous sera utile pour la démonstration du théorème dont il s'agit.

Soit $z_0, z_1, \ldots$ une suite de quantités données quelconques mais toutes distinctes les unes des autres, et soit $F(z)$ une fonction quelconque analytique n'ayant pas de singularités dans un certain domaine de la variable z qui contient les points $z_0, z_1, \ldots$ Désignons de plus par δ_p le symbole de l'opération qui, appliquée à la fonction $F(z_0)$, la change en celle-ci:

$$\delta_p\cdot F(z_0) = \frac{F(z_p)-F(z_0)}{z_p-z_0},$$

et qui ne porte sur aucune autre quantité que z_0.

Les opérations δ_p, δ_q seront commutatives mutuellement, car on trouve

$$\delta_p\delta_q\cdot F(z_0) = \delta_p\cdot\frac{F(z_q)-F(z_0)}{z_q-z_0}$$

$$= \frac{F(z_q)}{(z_q-z_0)(z_q-z_p)}+\frac{F(z_p)}{(z_p-z_0)(z_p-z_q)}+\frac{F(z_0)}{(z_0-z_q)(z_0-z_p)}.$$

Ces définitions données, nous allons justifier la formule suivante

$$\partial_n \partial_{n-1} \ldots \partial_1 \cdot F(z_0) = \frac{\lambda}{n!} F^{(n)}(\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1 + \ldots + \theta_n z_n), \quad (2)$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_n = 1,$$

où toutes les θ sont des nombres positifs plus petits que l'unité, et où λ désigne comme plus haut une quantité dont le module est moindre que l'unité. Ici nous supposons que la fonction $F(z)$ reste régulière (holomorphe) dans un domaine limité par une courbe convexe qui enferme tous les points $z_0, z_1, \ldots z_n$, car $\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1 + \ldots + \theta_n z_n$ représente un point à l'intérieur ou sur la circonférence du plus petit polygone convexe ayant pour sommets ceux des points $z_0, \ldots z_n$ qui ne tombent pas à l'intérieur du polygone[1]).

La formule (2) est évidemment correcte pour $n = 1$, car on trouve selon la formule de M. Darboux

$$\partial_1 \cdot F(z_0) = \frac{F(z_1) - F(z_0)}{z_1 - z_0} = \lambda F'(\theta_0 z_0 + \theta_1 z_1), \quad \theta_0 + \theta_1 = 1.$$

Supposons donc que (2) soit correcte pour un certain n, il est aisé de voir qu'elle le sera encore pour $(n+1)$. On a, en effet,

$$\partial_{n+1} \partial_n \ldots \partial_1 \cdot F(z_0) = \partial_n \ldots \partial_1 \partial_{n+1} \cdot F(z_0)$$

$$= \partial_n \ldots \partial_1 \cdot \frac{F(z_{n+1}) - F(z_0)}{z_{n+1} - z_0}$$

expression qui, par hypothèse, est égale à

$$\frac{\lambda}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \left(\frac{F(z_{n+1}) - F(z_0)}{z_{n+1} - z_0} \right)_{\theta_0 z_0 + \ldots + \theta_n z_n},$$

[1]) Du reste on voit sans trop de peine que nous pouvons nous restreindre à supposer, 1° que la fonction reste régulière à l'intérieur du polygone en question, 2° qu'elle ait une dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ unique et continue en tout point situé sur la circonférence ou aux sommets du polygone, cette dérivée étant en même temps dirigée vers l'intérieur ou le long de la circonférence, et 3° que pour un point intérieur se mouvant vers les limites du polygone, la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ tend uniformément vers sa limite.

où, la différentiation étant effectuée, il faut remplacer z_0 par $\theta_0 z_0 + \ldots + \theta_n z_n$. Or la formule (1) nous donne

$$\frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \frac{F(z_{n+1}) - F(z_0)}{z_{n+1} - z_0} = \frac{\lambda'}{n+1} F^{(n+1)}(\theta z_0 + (1-\theta) z_{n+1}),$$

λ' et θ ayant les mêmes significations que d'ordinaire. Par conséquent on trouve

$$\delta_{n+1} \ldots \delta_1 \cdot F(z_0)$$
$$= \frac{\lambda\lambda'}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta\theta_0 z_0 + \ldots + \theta\theta_n z_n + (1-\theta) z_{n+1}),$$

où $\lambda\lambda'$ peut évidemment être remplacée par λ, et $\theta\theta_0, \ldots \theta\theta_n$, $1-\theta$ par $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_{n+1}$, la somme de ces quantités étant égale à $(\theta + 1 - \theta)$ ou à l'unité. Nous avons ainsi établi la formule (2) pour un n quelconque.

Dans le cas d'une fonction et d'une variable réelles, on peut évidemment remplacer λ par l'unité dans la formule (2). On retombe de cette façon sur une formule donnée par M. Schwarz[1]) et démontrée par ce savant d'une manière analogue à celle que nous avons employée dans l'introduction à cette note.

3. Nous avons vu plus haut que, dans la série de Taylor, le reste pouvait s'exprimer par

$$\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}.$$

Une expression analogue se présente dans le cas de la formule générale d'interpolation. On démontre en effet sans difficulté les identités suivantes:

$$\delta_1 \cdot \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)} (F(z) - F(z_0) - (z-z_0)\,\delta_1 \cdot F(z_0)),$$

$$\delta_2\,\delta_1 \cdot \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)} (F(z) - F(z_0) - (z-z_0)\,\delta_1 \cdot F(z_0) - (z-z_0)(z-z_1)\,\delta_2\,\delta_1 \cdot F(z_0)),$$

---

[1]) Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XVII, ou Gesammelte math. Abhandl., t. II, p. 207.

et ainsi de suite. En général on trouve

$$(z-z_0)\dots(z-z_n)\,\delta_n\dots\delta_1\,\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=$$

$$F(z)-F(z_0)-(z-z_0)\,\delta_1\cdot F(z_0)-\dots-(z-z_0)\dots(z-z_n)\,\delta_n\dots\delta_1\cdot F(z_0), \quad (3)$$

dont le deuxième membre est précisément le reste dans la formule d'interpolation.

En supposant que $F(z)$ reste régulière dans un domaine mliité par une courbe convexe enfermant les points $z, z_0, \dots z_n$, nous pouvons exprimer ainsi le premier membre de (3):

$$(z-z_0)\dots(z-z_n)\,\delta_n\dots\delta_1\,\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lambda\,\frac{(z-z_0)\dots(z-z_n)}{(n+1)!}\,F^{(n+1)}(\theta_0 z_0+\dots+\theta_n z_n+\theta_{n+1}z), \quad (4)$$

$$\theta_0+\dots+\theta_n+\theta_{n+1}=1,$$

ce que l'on voit immédiatement en remplaçant, dans l'équation (2), n par $(n+1)$ et z_{n+1} par z.

Ainsi se trouve établie la formule générale que nous nous sommes proposé de démontrer, et qui donne en un seul terme l'expression du reste dans la série d'interpolation de Newton.

4. Une autre méthode va nous conduire au même résultat. On a en effet

$$\delta_p\cdot F(z_0)=\int_0^1 F'(tz_0+(1-t)z_p)\,dt,$$

et par suite

$$\delta_1\cdot F(z_0)=\int_0^1 F'\cdot(t_1 z_0+(1-t_1)z_1)\,dt_1,$$

et

$$\delta_2\,\delta_1\cdot F(z_0)=\int_0^1 dt_1\int_0^1 F''(t_1 t z_0+t_1(1-t)z_2+(1-t_1)z_1)\,t_1\,dt$$

$$=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\,F''(t_2 z_1+(t_1-t_2)z_2+(1-t_1)z_1).$$

En continuant ainsi on trouve

$$\delta_n\dots\delta_1\cdot F(z_0)=$$

$$\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\dots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\,F^{(n)}(t_n z_0+(t_{n-1}-t_n)z_n+\dots+(t_1-t_2)z_2+(1-t_1)z_1),$$

car en effectuant sur les deux membres l'opération δ_{n+1}, et en remplaçant $t_n t$ par t_{n+1} on trouve une équation de la même forme où seulement n est changé en $(n+1)$. Puisque le premier membre de l'équation que nous venons de démontrer, est symétrique par rapport aux quantités $z_0, z_1, \dots z_n$, on peut aussi écrire

$$\delta_n \delta_{n-1} \dots \delta_1 \cdot F(z_0) =$$

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n F^{(n)}((1-t_1)z_0 + (t_1-t_2)z_1 + \dots + (t_{n-1}-t_n)z_{n-1} + t_n z_n), \quad (5)$$

expression qui nous semble assez remarquable.

Remplaçons dans l'équation (5) n par $(n+1)$ et z_{n+1} par z nous avons l'expression du reste dans la série d'interpolation par une intégrale définie $(n+1)^{\text{iple}}$:

$$(z-z_0)\dots(z-z_n)\,\delta_n \dots \delta_1 \cdot \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$$

$$= (z-z_0)\dots(z-z_n)\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} F^{(n+1)}((1-t_1)z_0 + (t_1-t_2)z_1 + \dots$$

$$\dots + (t_n - t_{n+1})z_n + t_{n+1} z). \quad (6)$$

La formule (4) n'est qu'un corollaire de (6); c'est ce qu'on voit aisément en remarquant que

$$\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Copenhague, le 13 octobre 1894.